**СУ №3: Кинематика и динамика на идеално твърдо тяло (3 уч. часа)**

1-ви час: **I**. **Основни кинематични величини при въртене на идеално**

**твърдо тяло (ИТТ) около неподвижна ос**

1.Ъгъл на завъртане – основен параметър - ∆**φ** (rad)

2.Ъглова скорост - **ω** (средна и моментна) – (rad/s)

ωср(t)= ∆φ/∆t ; ωм(t) = dφ/dt

3.Ъглово ускорение – **α** (средно и моментно) – (rad/s2)

αср(t)= ∆ω/∆t ; αм(t) = dω/dt = d2φ/dt2

4. Видове въртене в зависимост от ъгловото ускорение:

* α = 0 ⇾ ∆ω = 0 ⇾ ω = const ⇾ равномерно въртене;

∆φ = φt – φ0 = ωt;

(φ0 и φt  съответно са ъглите на завъртане в началния и

крайния момент от време)

Период и честота при равномерно въртене:

период – Т(s) – времето за един пълен оборот при въртенето;

честота – f (s-1) – броят на пълните обороти за време 1 s;

двете величини са реципрочно свързани: f T = 1;

ω = ∆φ/∆t =2π/T = 2πf (при един пълен оборот

ъгълът на завъртане е 2π, а времето е равно на Т)

* α ≠0 = сonst → равноускорително (α>0) и

равнозакъснително (α<0) въртене;

ωt = ω0 ± αt; ∆φ = φt – φ0 = ω0t ± αt2/2

(ω0 - нач. скорост при t=0; ωt –крайна скорост на въртене при t≠0)

5. Връзка между кинематични величини при постъпателно и въртеливо движение

постъпателно движение въртеливо движение

път – S ↔ ъгъл на завъртане - ∆**φ** ⇾ S = R∆φ

линейна скорост - ***v*** ↔ ъглова скорост - **ω** ⇾ *v* = Rω

линейно ускорение – **а** ↔ ъглово ускорение - **α**

**аn** – нормално ускорение (характеризира изменението на

скоростта *v* по посока; аn = v2/R = R2ω2/R =Rω2;

**at** – тангенциално ускорение (характеризира изменението на скоростта *v* по големина); аt = dv/dt = Rdω/dt = Rα

**Задачи**: стр. 54 – 2; 3**; Въпроси с избир. отговор**: стр. 51- 4; 6;

стр. 55 – 4; 6; 8; 11 (дом. раб.) стр. 52 – 8; 9; 10; 11

**Зад. 2**: Тяло се движи по окръжност и променя скоростта си от

0,9 m/s до 0,1m/s за 8 s. Диаметърът на окръжността е 80 cm. Какво е средното ъглово ускорение на тялото?

v1 = 0,9 m/s; ∆t = 8 s;

v2 = 0,1 m/s; D = 80 cm = 80.10-2m = 0,8 m; R=0,4 m; αср = ?

αср = ω2 - ω1 /∆t ; ω1 = v1/R; ω2 = v2/R; αср =(v2–v1) /R∆t = - 0,25 rad/s2

**Зад. 3**: Да се определи големината на ъгловата и линейната скорост на точките от ръба на диска на грамофонна плоча с радиус 10 cm, която прави 45 оборота за 1 минута.

R = 10cm = 10.10-2m = 0,1 m; f = 45/60 = 3/4 s-1; 1 min = 60 s;

ω = ? ; v = ?

ω = 2πf = 3/2 π = 1,5 π rad/s ; v = Rω = 0,1.1.5π = 0,15π m/s

**Зад. 4**: Диск се върти с честота 45 оборота за минута. Определете ъгъла, на който ще се завърти точка от диска за 12 s.

f = 45/60 = 3/4s-1; t = 12 s; ∆φ = ?

∆φ = ωt; ω = 2πf; ∆φ =2πft = 2π3/4 .12 =18π rad

**Зад. 6**: Маховик с диаметър 80 cm извършва 30 оборота за 1 минута. Да се определят скоростта на периферните точки на маховика, периода му на въртене и ъгловата му скорост.

D = 80 cm = 80.10-2m = 0,8 m; R = 0,4 m; f =30/60 = 1/2 s-1;

v = ?; T = ?; ω = ?

ω =2πf = π rad/s; T = 1/f = 2 s; v = Rω = 0,4π m/s

**Зад. 8**: Колело започва да се върти и след 3 минути честотата му на въртене е 420 оборота за минута. Колко оборота е направило колелото, ако се приеме, че въртенето е равноускорително?

ω0 = 0; f = 420/60 = 7s-1; t = 3 min = 3.60 = 180 s; α >0 ;

N = ? (N – брой на оборотите на колелото)

∆φ = 2πN; (при 1 оборот на колелото ∆φ = 2π rad)

∆φ = ωt /2 =2πft/2 (равноускорително движ. без нач. скорост);

2πN = πft ; N = ft/2 = 630

**Зад. 11**: Топка се движи по окръжност, като ъгълът на завъртане

се определя от уравнението: φ(t) = 7+ 2t + t3. Да се определят ъгловите скорост и ускорение на топката в момента от време

t1 = 2 s. Характеризирайте движението на топката.

φ(t) = 7 + 2t + t3 ; t1 = 2 s; ωм ( t1) = ? αм(t1) = ?

Първо определяме ъгловата скорост и ъгловото ускорение в произволен момент от време t като диференцираме:

ωм(t)= dφ/dt =2+3t2 ; αм(t)= dω/dt = 6t, а след това заместваме t=t1:

ω (t1) = 2 + 3t12 = 2 + 3.4 = 14 rad/s ; α(t1) = 6t1 = 6.2 = 12 rad/s2;

движението на топката е ускорително

2-ри час : **II. Основни динамични величини при въртене на**

**ИТТ около неподвижна ос**

1. Кинетична енергия и инерчен момент при въртене.

Теорема на Щайнер

При въртенето на тялото всички частици извършват движение

по окръжности: кинет. енергия на 1 частица е Еki = mivi2/2 = miri2ω2/2,

а енергията на цялото тяло ще бъде Еk =∑miri2ω2/2 = ∑Iiω2/2 = Iω2/2;

въвеждаме нова величина Ii = miri2(kg.m2) – инерчен момент на мат.точка, която се върти около неподвижна ос и се намира на разстояние ri от нея; сумата ∑Ii = I определя инерчния момент на въртящото се тяло; така за кинет. енергия на въртящо се тяло получихме формулата Еk = Iω2/2.

Инерчият момент на телата зависи от тяхната форма и размери:

Например инерчният момент на плътен цилиндър, въртящ се около ос, минаваща през центъра на тежестта му, е I = mR2/2,

а I = m(R12 + R22)/2 e инерчният момент на кух цилиндър, който

се върти около ос, минаваща през центъра на тежестта му.

Теоремата на Щайнер се отнася за тяло, което се върти около ос, която

не минава през центъра на тежестта му, но е успоредна на нея и се намира на разстояние b (от нея). Инерчният момент в този случай

се определя от следния израз I = mb2+ I0 , който е известен като теоремата на Щайнер; I0 се нарича собствен инерчен момент на тяло, въртящо се около ос, минаваща през центъра на тежестта му.

1. Работа на сила при въртене. Момент на сила (въртящ момент).

Основно уравнение при въртене на ИТТ около неподвижна ос

Едно тяло започва да се върти вследствие на приложена върху него сила. Работата, която извършва силата за да се завърти тялото, се определя от израза А = М∆φ = М(φ2 – φ1), където М се нарича момент на силата (въртящ момент), а φ1 и φ2 са съответно ъглите в началния и крайния момент от време. За въртящия момент на силата има няколко формули:

**М** = **r** x **F** (векторно произведение на два вектора), което по големина

се определя от формулата М =rFsinα = Fl(Nm), където α е ъгълът между векторите **r** и **F**, а величината l = rsinα се нарича рамо на силата **F**. Изразът **M** = I**α** се определя като основно динамично уравнение при въртене на ИТТ около неподвижна ос и определя

момента на силата на тялото (аналогично на уравнението **F** = m**a**

при постъпателното движение )

1. Връзка между работа и кинетична енергия при въртене

Ако на дадено въртящо се тяло действа външна сила, тя променя

ъгловата скорост на тялото и извършва определено количество работа, което води до изменение на кинетичната енергия на тялото.

А = ∆Ek = Еk2 - Ek1 =I(ω22 - ω12)/2, където ω1 и ω2  са ъгловите скорости в началния и крайния момент от действието на силата.

Ако в началния момент тялото е в състояние на покой (ω1 = 0).

1. Момент на импулс на тяло при въртене. Закон за изменение

на момента на импулса (ЗИМИ) и закон за запазване на момента на на импулса (ЗЗМИ)

За характеризиране на въртеливото движение се въвежда още една величина, която е аналог на импулса на тяло при постъпателните движения (**p** = m**v**) и се нарича момент на импулсa на тяло **L**. Най-напред ще дефинираме момента на импулса на една частица (материална точка) от въртящото се тяло**: Li** = Ii**ω**; тя може да се представи и като векторно умножение на векторите **ri** u **pi**: **Li** = **ri** x **pi** ; по големина LI = rimivi(kg.m2/s) = Iiω; за цялото тяло след сумиране ще получим израза **L** = I**ω**; допускаме, че разглежданото тяло се върти

pавномерно (ω = const); в случай, че върху тялото действа външна сила (отворена механична система), тя ще промени неговата ъглова скорост и съответно момента на импулса му: ∆**L** = I∆**ω**; за да определим изменението на момента на импулса на тялото за 1s, разделяме двете страни на уравнението на големината на интервала от време ∆t: ∆**L**/∆t = I∆**ω**/∆t = I**α** = **M**⇾ полученият израз е известен като **ЗИМИ** на въртящо се тяло (за **отворена механична система** – външна сила действа върху въртящото се тяло).

В случая когато върху тялото не действа външна сила (**затворена механична система**) **F**B = 0 ⇾ **M** = 0, ∆**L**/∆t = 0 ⇾ **L** =∑**Li** = const.

Последният израз е известен като **ЗЗМИ** при въртеливите движения.

**Задачи:** стр. 55 – 12, 16; **Въпроси с избир. отговор**: стр. 51 – 1;

56 – 23, 25, 27, 29; (дом. раб.) 52 – 15;

57 – 37, 38, 39 53 – 18; 20, 23, 24;

54 – 27, 29

**Зад. 12**: Определете инерчния момент на материална точка с маса

0,3 kg спрямо ос, намираща се на разстояние 20 cm от точката.

mi = 0,3 kg; ri = 20 cm = 20.10-2 m = 0,2 m; Ii = ?

Ii = miri2 = 0,3.(0,2)2 = 0,012 kg.m2

**Зад. 16**: Върху маховик с инерчен момент 5 kg.m2 е приложен въртящ момент 10 Nm . Определете: а) ъгловото ускорение на маховика; б) кинетичната енергия на маховика при ъглова скорост 100 rad/s .

I = 5 kg.m2; M = 10 Nm; a) α = ?; b) Ek = ? ako ω = 100 rad/s

1. M = Iα; α = M/I = 10/5 = 2 rad/s2;
2. Ek = Iω2/2 = 5.104/2 = 2,5.104 J

**Зад. 23**: Маховик с инерчен момент 50 kg.m2 се върти равноускорително под действие на сила. За интервал от време

30 s маховикът придобива кинетична енергия 400 J. Да се определи въртящия момент на силата и ъгловото ускорение.

I = 50 kg.m2; α > 0; ω0 = 0; t = 20 s; Ek = 400 J; M = ? α = ?

Ek = Iω2/2 → ω = √2Ek/I =√2.400/50 = √16 = 4 rad/s;

ω = αt ; α = ω/t = 4/20 = 1/5 rad/s2; M = Iα = 50.1/5 = 10 Nm

**Зад. 25**: Човек действа със сила 15 N на края на врата с широчина

84 cm. Да се определи въртящия момент на силата, ако тя е приложена: перпендикулярно на плоскостта на вратата; под ъгъл 600 към плоскостта на вратата.

F = 15 Nm; r = 84 cm = 84.10-2 m = 0,84 m; M1 = ? → α1 = 900;

M2 = ? → α2 = 600

M1 = Frsin900 = 15.0,84.1 = 12,6 Nm;

M2 = Frsin 600 = 15.0,84.0,87 = 10,96 Nm

**Зад. 27**: Каква работа извършва момче при каране на велосипед за 1 час, ако рамото на педала е 20 cm, приложената сила е постоянна и има големина 10 N, а педалите правят по 60 оборота за 1 минута?

∆t = 1h = 3,6.103s ; l = 20 cm = 20.10-2m = 0,2 m; F = 10 N;

f = 60/60 = 1 s-1; A = ?

A = M∆φ = Flω∆t; ω = 2πf ; A = Fl2πf∆t = 10.0,2.2.π.1.3,6.103 = 45,2.103 J

**Зад. 29**: Роторът на електродвигател се върти с честота 3.103 оборота за минута. Колко е въртящият момент, ако мощността на електродвигателя е 0,628 kW ?

n = 3.103 об.; t = 1 min = 60 s ; f = 3.103/60 = 50 s-1;

P = 0,628 kW = 0,628.103 W = 628 W; M = ?

P = A/t = M∆φ/t = Mω = M2πf; M =P/2πf = 628/2.3,14 .50 = 2 Nm

[ Зад. 37, 38, 39 и въпросите с избираем отговор от дом. раб ще решим в следващото упражнение (1-вия час), когато ще завършим темата „Кинематика и динамика на идеално твърдо тяло“.

В теоретичната част на упражнението с удебелен шрифт съм означила векторните величини при постъпателно движение и псевдовекторните (аксиалните вектори) при въртеливо движение ; в задачите ние определяме тези величини по големина.]